バナッハ空間の実数パラメータ非拡大半群に関する点列的不動点近似法(バナッハ空間及び関数空間の構造の研究)

高橋, 渉; 善林, 啓

数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 20-30

バナッハ空間の実数パラメータ非拡大半群に関する点列的不動点近似法

Wataru Takahashi(高橋　渉), Kei Zembayashi(善林　啓)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology, Tokyo 152-8552, Japan
(東京工業大学 大学院情報理工学研究科)

1　はじめに

Cをバナッハ空間Eの閉で凸集合であるとする. 写像Tが$\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\| \quad \forall x, y \in C$を満たすとき$C$上の非拡大写像 (nonexpansive) であると定義する. また, $F(T)$をTの不動点集合とする. $\{T(t) : t \geq 0\}$が, C上の実数パラメータ非拡大半群 (one-parameter nonexpansive semigroup) であるということを以下のように定義する:

(i) $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in C$;

(ii) $T(t+s)x = T(t)T(s)x \ \forall t, s \geq 0$, $\forall x \in C$;

(iii) $T(0)x = x$, $\forall x \in C$;

(iv) $\forall x \in C$, $t \mapsto T(t)x$ が連続写像.

1996 年, 清水–高橋 [11] は Cesàro mean

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

と非拡大写像に関する点列的不動点近似法を組み合わせることにより新たな iterative scheme を導入し, 次のような定理を証明した:

C をヒルベルト空間 H の閉で凸な部分集合とする. T をリプシッツ定数 $\{k_n\}$ を持つ C 上の漸近的非拡大写像 (asymptotically nonexpansive mapping) とし $F(T) \neq \emptyset$ とする. $u \in C$ とし, $\{x_n\}$ を次の点列で定義する:

$$x_n = a_n u + \frac{1-a_n}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i x_n$$

ただし, $0 < a < 1$, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+|1-k_i|+e^{-i})$ そして $a_n = \frac{b_n-1}{b_n-1+a}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ とする. そのとき点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の点に強収束する.

ただし, 写像 T が $\|T^n x - T^n y\| \leq k_n\|x-y\| \quad \forall x,y \in C, n \in \mathbb{N}$ かつ $\limsup_{n\to\infty} k_n \leq 1$ を満たすとき, T をリプシッツ定数 $\{k_n\}$ を持つ C 上の漸近的非拡大写像 (asymptotically nonexpansive mapping) という.

この iterative scheme の導入により, これまで点列的な不動点近似法を考えることができなかった非拡大半群についても研究が可能となり, これまで多くの研究が行われてきた. 次の定理は鈴木–高橋 [20] によって 2004 年に証明された定理だが, これらの研究において非常に有用な結果の 1 つである:

C をバナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とし, $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群とする. $x_1 \in C$ とし, 数列 $\{x_n\} \subset C$ を以下のように定義する:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds + (1-\alpha_n)x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{t_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} = 1$$

を満たすとする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点 z_0 に強収束する.

また, Das–Debata[5] は次の定理を証明した:

C を狭義凸バナッハ空間 E の閉で凸な部分集合とする. S, T を C 上の quasi-nonexpansive 写像とし, T は C 上で連続であり, $F(S) \bigcap F(T) \neq \emptyset$ かつ, ある E のコンパクト集合 K が存在して $T(C) \subset K \subset C$ であるとする. $x_1 \in C$ とし, 数列 $\{x_n\} \in C$ を以下のように定義する:

$$x_{n+1} = \alpha_n T\{(1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n\} + (1-\alpha_n)x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は集積点を $(0,1)$ の中にもち，$\{\beta_n\} \subset [0,1]$ は $\lim_{n\to\infty}\beta_n \in (0,1)$ を満たすとする．そのとき点列 $\{x_n\}$ は $F(S)\bigcap F(T)$ に強収束する．

ただし，写像 T が $\forall x \in C, p \in F(T)$ に対して，$\|Tx-p\| \leq \|x-p\|$ を満たすとき quasi-nonexpansive であるという．

本研究においては，この Das–Debata の定理を参考にし，実数パラメータ非拡大半群に関する点列的不動点近似法について研究を行い，2 つの実数パラメータ非拡大半群に対する点列的不動点近似法を導入し，その点列が共通不動点に強収束するという結果を得た．

2 準備

$\mathbb{N}$ を自然数とし，E を実バナッハ空間とする．バナッハ空間 E が狭義凸であるとは，E の任意の一次独立な元 x, y に対して

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$$

がつねに成り立つことである．これは，$\|x\| = \|y\| = 1 (x \neq y)$ ならば

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$$

となるということとも同値である．また，狭義凸バナッハ空間について次の補題は，よく知られた結果である．

補題 1. E を狭義凸バナッハ空間とする．$u, v \in E$ について，$\|v\| \leq \|u\|$ であり，かつ

$$\|(1-t)u + tv\| = \|u\|$$

がある $t \in (0,1)$ で成り立っているとする．そのとき

$$u = v.$$

次の命題は鈴木 [19] によって得られた結果である．この命題は本研究において本質的な役割を果たす．

命題 1. C を狭義凸バナッハ空間 E の閉で凸な部分集合とする．実数 τ_∞ を $\tau_\infty > 0$ とし，$\{T(t) : t \in [0, \tau_\infty)\}$ は C 上の写像族とし次を満たすものとする:

(i) 任意の $t \in [0, \tau_\infty)$ について, $T(t)$ は非拡大写像;

(ii) 狭義増加数列 $\{\tau_n\} \subset [0, \tau_\infty)$ で, $\tau_1 = 0$ であり, $\{\tau_n\}$ が τ_∞ に収束し, かつ $\forall x \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ について, 写像 $t \mapsto T(t)x$ が $[\tau_n, \tau_{n+1})$ 上で弱連続であるようなものが存在する.

また

$$\bigcap_{t \in [0,\tau_\infty)} F(T(t)) \neq \emptyset$$

を仮定する. そのとき

$$\bigcap_{t \in [0,\tau_\infty)} F(T(t)) = F(S)$$

となる. ただし, S は次のように定義される C 上の非拡大写像である.

$$Sx = \frac{1}{\tau_\infty} \int_0^{\tau_\infty} T(s)xds, \qquad \forall x \in C.$$

3 Main Resalt

この節では我々の主結果を述べる.

定理 1. C を狭義凸バナッハ空間 E のコンパクトで凸な部分集合とし, $\{S(t) : t \geq 0\}$, $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群とする. $x_1 \in C$ とし, $\{x_n\}$ を以下で定義する:

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \frac{\alpha_n}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)[(1-\beta_n)x_n + \beta_n S(s)x_n]ds, \; n \in \mathbb{N}.$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$, $\{\beta_n\} \subset [0,1]$, $\{t_n\} \subset (0,\infty)$ は
$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$,
$0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$,
$0 < \liminf_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n < \infty$ を満たす.

そのとき, $\{x_n\}$ は $\{T(t) : t \geq 0\}$ と $\{S(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点 z_0 に強収束する.

証明の概略. $p \in \bigcap_{t\geq 0} F(T(t)) \bigcap F(S(t))$ とする. このとき

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-p\| &\leq \left\|(1-\alpha_n)x_n + \frac{\alpha_n}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)[(1-\beta_n)x_n + \beta_n S(s)x_n]ds - p\right\| \\
&\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| \\
&\qquad + \frac{\alpha_n}{t_n}\left\|\int_0^{t_n} T(s)[(1-\beta_n)x_n + \beta_n S(s)x_n]ds - p\right\| \\
&\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \frac{\alpha_n}{t_n}\int_0^{t_n} \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n S(s)x_n - p\|\, ds \\
&\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| \\
&\qquad + \frac{\alpha_n}{t_n}\int_0^{t_n} (1-\beta_n)\,\|x_n - p\| + \beta_n\,\|S(s)x_n - p\|\, ds \\
&\leq \|x_n - p\|
\end{aligned}
$$

となることから, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ が存在する.

さらに, 補題 (Das–Debata[5]) より, 以下の 2 つが証明できる.

- $\{x_n\}$ の集積点 p が, $p \in \bigcap_{t\geq 0} F(T(t)) \bigcap F(S(t))$ ならば $x_n \to p$.
- $p \in \bigcap_{t\geq 0} F(T(t)) \bigcap F(S(t))$ とし, x_0, x_0' が $\{x_n\}$ の集積点ならば, $\|x_0 - p\| = \|x_0' - p\|$.

ここで, $0 < \liminf_{n\to\infty}\alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ より, $\{\alpha_n\}$ は収束する部分列を持つ. また, $\{\beta_n\}$, $\{t_n\}$ も収束する部分列を持つ. さらに, $\{x_n\} \subset C$ であり, かつ C はコンパクトであることから, $\{x_n\}$ も C 上収束する部分列を持つ. また

$$
z_n = (1-\alpha_n)x_n + \frac{\alpha_n}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)[(1-\beta_n)x_n + \beta_n S(s)x_n]ds \in C
$$

であることから, $\{z_n\}$ は C 上に収束する部分列を持つ.
以上のことから, $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{n_k} \to \alpha_0 \in (0,1), \\
&\beta_{n_k} \to \beta_0 \in (0,1), \\
&t_{n_k} \to t_0 < \infty, \\
&x_{n_k} \to x_0,
\end{aligned}
$$

$$x_{n_k+1} = (1-\alpha_{n_k})x_{n_k} + \frac{\alpha_{n_k}}{t_{n_k}}\int_0^{t_{n_k}} T(s)[(1-\beta_{n_k})x_{n_k} + \beta_n S(s)x_{n_k}]ds \to x_0'$$

となるようにできる. さらに, ここで
$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{1}{t_{n_k}}\int_0^{t_{n_k}} T(s)\{(1-\beta_{n_k})x_{n_k}+\beta_{n_k}S(s)x_{n_k}\}ds - \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds\right\| = 0$
を示す. 実際

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{t_{n_k}}\int_0^{t_{n_k}} T(s)\{(1-\beta_{n_k})x_{n_k}+\beta_{n_k}S(s)x_{n_k}\}ds \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds\right\| \\
\leq &\left\|\frac{1}{t_{n_k}}\int_0^{t_{n_k}} T(s)[(1-\beta_{n_k})x_{n_k}+\beta_{n_k}S(s)x_{n_k}] - T(s)[(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0]ds\right\| \\
&\qquad + \left\|\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{t_{n_k}}\int_0^{t_{n_k}} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds\right\| \\
\leq &\frac{1}{t_{n_k}}\int_0^{t_{n_k}} \|T(s)[(1-\beta_{n_k})x_{n_k}+\beta_{n_k}S(s)x_{n_k}] - T(s)[(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0]\|\,ds \\
&\qquad + \left|\frac{1}{t_{n_k}} - \frac{1}{t_0}\right|\left\|\int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds\right\| \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{t_{n_k}}\left\|\int_{t_{n_k}}^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds\right\| \\
\leq &\frac{1}{t_{n_k}}\int_0^{t_{n_k}} \|[(1-\beta_{n_k})x_{n_k}+\beta_{n_k}S(s)x_{n_k}] - [(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0]\|\,ds \\
&\qquad + \left|\frac{1}{t_{n_k}} - \frac{1}{t_0}\right|\left\|\int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds\right\| \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{t_{n_k}}\left\|\int_{t_{n_k}}^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0+\beta_0 S(s)x_0\}ds\right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq & \frac{1}{t_{n_k}} \int_0^{t_{n_k}} \|x_{n_k} - x_0\| + \|\beta_{n_k} x_{n_k} - \beta_0 x_0\| + |\beta_{n_k} - \beta_0| \|S(s)x_{n_k}\| \\
& \quad + \beta_0 \|x_{n_k} - x_0\| ds + \left| \frac{1}{t_{n_k}} - \frac{1}{t_0} \right| \left\| \int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} ds \right\| \\
& \qquad + \frac{1}{t_{n_k}} \left\| \int_{t_{n_k}}^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} ds \right\|
\end{aligned}
$$

となることから

$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{t_{n_k}} \int_0^{t_{n_k}} T(s)\{(1-\beta_{n_k})x_{n_k} + \beta_{n_k} S(s)x_{n_k}\} ds - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} ds \right\| = 0$

となる.

ここで, x_0, x_0' が $\{x_n\}$ の集積点であることから, $p \in \bigcap_{t\geq 0} F(S(t)) \bigcap F(T(t))$ について

$$
\begin{aligned}
& \|x_0 - p\| = \|x_0' - p\| \\
= & \lim_{k\to\infty} \left\| (1-\alpha_{n_k})x_{n_k} + \frac{\alpha_{n_k}}{t_{n_k}} \int_0^{t_{n_k}} T(s)\{(1-\beta_{n_k})x_{n_k} + \beta_{n_k} S(s)x_{n_k}\} ds - p \right\| \\
\leq & \lim_{k\to\infty} \Bigg\{ \|(1-\alpha_{n_k})x_{n_k} - (1-\alpha_0)x_0\| \\
& + \Bigg\| \frac{\alpha_0}{t_0} \int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} ds \\
& \qquad - \frac{\alpha_{n_k}}{t_{n_k}} \int_0^{t_{n_k}} T(s)\{(1-\beta_{n_k})x_{n_k} + \beta_{n_k} S(s)x_{n_k}\} ds \Bigg\| \\
& \quad + \left\| (1-\alpha_0)x_0 + \frac{\alpha_0}{t_0} \int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} ds - p \right\| \Bigg\} \\
= & \left\| (1-\alpha_0)x_0 + \frac{\alpha_0}{t_0} \int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} ds - p \right\| \\
\leq & (1-\alpha_0)\|x_0 - p\| + \frac{\alpha_0}{t_0} \left\| \int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} ds - p \right\| \\
\leq & (1-\alpha_0)\|x_0 - p\| + \frac{\alpha_0}{t_0} \int_0^{t_0} \|T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\} - p\| \, ds \\
\leq & \|x_0 - p\|
\end{aligned}
$$

となる．故に

$$\|x_0 - p\| = \left\|(1-\alpha_0)x_0 + \frac{\alpha_0}{t_0}\int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\}ds - p\right\|.$$

今, E は狭義凸バナッハ空間であることから補題 1 より

$$x_0 = \int_0^{t_0} T(s)\{(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(s)x_0\}ds.$$

よって, 命題 1 より

$$x_0 \in \bigcap_{0 \geq t \geq t_0} F(T(t)[(1-\beta_0)I + \beta_0 S(t)])$$

となる．ただし, I は恒等写像である．つぎに任意の $t \in [0, t_0]$ について

$$\begin{aligned}\|x_0 - p\| &= \|T(t)(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(t)x_0) - p\| \\ &\leq \|(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(t)x_0 - p\| \\ &\leq (1-\beta_0)\|x_0 - p\| + \beta_0\|S(t)x_0 - p\| \\ &\leq \|x_0 - p\|\end{aligned}$$

である．故に

$$\|x_0 - p\| = \|(1-\beta_0)x_0 + \beta_0 S(t)x_0 - p\|.$$

となる．よって, 補題 1 から

$$x_0 = S(t)x_0$$

となる．以上のことから

$$x_0 \in \bigcap_{0 \leq t \leq t_0} F(T(t)) \cap F(S(t))$$

となる．さらに, $\{S(t) : t \geq 0\}$ と $\{T(t) : t \geq 0\}$ は, 実数パラメータ半群であることから

$$x_0 \in \bigcap_{t \geq 0} F(T(t)) \cap F(S(t))$$

となる．よって, $\{x_n\}$ の集積点 x_0 は $\bigcap_{t\geq 0} F(T(t)) \bigcap F(S(t))$ の点となることから, $\{x_n\}$ は, $\bigcap_{t\geq 0} F(T(t)) \bigcap F(S(t))$ の点に収束することが分かる．

□

4 Application

H をヒルベルト空間とし, $g : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続凸関数とする.

$$\partial g(x) = \{x^* \in H : g(y) \geq g(x) + \langle x^*, y - x\rangle, y \in H\}$$

とするとき, ∂g は m-accretive operator となることが知られている. ここで次のような initial value problem を考える:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + \partial g(u(t)) & \ni & 0, \qquad t > 0, \\ \qquad u(0) & = & x. \end{cases}$$

ただし, $x \in \overline{D(\partial g)}$. 上の方程式は, 一意な strong solution $u : [0, \infty) \to H$ を持つことが知られている. $S(t)x = u(t)$ とおくと, $\{S(t) : t \in [0, \infty\}$ は, $\overline{D(\partial g)}$ 上の実数パラメータ非拡大半群となる. また, さらに

$$\begin{aligned} 0 \in \partial g(x_0) &\iff g(x_0) = \min\{g(x) : x \in H\} \\ &\iff x_0 \in \bigcap_{t \geq 0} F(S(t)) \end{aligned}$$

となる. このことから, 今 $f, g : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続凸関数とすると, f, g についてそれぞれ initial value problem を考えることにより, $\{S(t) : t \geq 0\}$, $\{T(t) : t \geq 0\}$ という 2 つの実数パラメータ非拡大半群を構成することができる. そして今回得られた結果を用いることにより, 2 つの実数パラメータ非拡大半群の共通不動点集合 $\bigcap_{t \geq 0} F(S(T)) \bigcap F(T(t))$ の点を求めること, すなわち

$$x_0 \in \arg\min\{f(x) : x \in H\} \bigcap \arg\min\{g(x) : x \in H\}$$

を求める iterative scheme を考えることができる.

参考文献

[1] S. Atsushiba, *Approximating common fixed points of asymptotically nonexpansive semigroups by the Mann iterative Process*, PanAmer. Math. J., **8** (1998), 45–58.

[2] S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, *Approximation common fixed points by the Mann iteration procedure in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **1** (2000), 351–361.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, **51** (1997), 1–61.

[4] H. Brézis, *Opèrateurs maximaux monotones*, Mathematics Stdies No.5, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[5] G. Das and J. P. Debata, *Fixed points of quasinonexpansive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math., **17** (1986), 1263–1269.

[6] W. Dotson, *On the Mann iterative process*, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 65–73.

[7] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc, **44** (1974), 147–150.

[8] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mappings in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 65–71.

[9] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[10] R. E. Rhoades, *Comments on two fixed point iteration procedures*, J. Math. Anal. Appl., **56** (1976), 741–750.

[11] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal., **26** (1996), 265–272.

[12] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **211** (1997), 71–83.

[13] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal., **34** (1998), 87–99.

[14] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of averaged approximants for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Approx. Thory, **97** (1999), 53–64.

[15] N. Shioji and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Archiv der Mathematik, **72** (1999), 354–359.

[16] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **1** (2000), 73–87.

[17] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **3** (2002), 381–391.

[18] T. Suzuki, *Convergence theorems to common fixed points for infinite jamily of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces*, Nihonkai Math. J., **14** (2003), 43–54.

[19] T. Suzuki, *Common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups in strictly convex Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal., **2006** (2006), 1–10.

[20] T. Suzuki and W. Takahashi , *Strong convergence of Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **5** (2004), 209–216.

[21] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[22] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[23] W. Takahashi , *Convergence theorems and nonlinear projections in Banach spaces. Banach and function spaces*, Yokohama Publ., Yokohama, (2004), 145–174.